208. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式ニ就イテ(I)

北 川 敏 男 (阪大)

1. サキニ, 南雲氏ノ問題ニ就イテ (I), (II) ニ於テ、函數變換 $\Lambda f \int_a^b f(x+t)\,d\varphi(t)$ ニ關シテ、1°. 任意ノ函數——勿論若干ノ制限ハ附加サレネバナラヌ——ノ展開問題ト 2°. 特ニ函數方程式 $\Lambda f = 0$ ノ解ナル $f(x)$ ノ展開問題トヲ論ジタ。

此處デハ、コレト同一ノ方針デ、*linear translatable differential operator* トモ云フベキ函數變換

$$\Gamma f(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)$$

ニ就イテ問題 1°, 2° 論ジテ見タイ。即チ吾々ノ立場ハ, Γf ノ移動可能性ト線狀トニ着眼シテ論歩ヲ進メルニ在ル. 繰返スマデモナク、任意ノ實數 τ ニ關シテ函數 $f(x)$ ヲ $f(x+\tau)$ ニ移ス函數變換ヲ T_τ デ表ハストキ, 即チ

$$T_\tau f(x) \equiv f(x+\tau)$$

ト定義スルトキハ,

$$T_\tau\{\Gamma f(x)\} = \Gamma\{T_\tau f(x)\}$$

ナル性質ヲモツ、コレヲ函數變換ノ移動可能性トイフ。

方程式 $\Lambda f = 0$, ガソノ特別ノ場合トシテ、定係數 Difference-equation ヤ或種ノ積分方程式ヲ含ム如ク、方程式 $\Gamma f = 0$ ハ定係數ノ Difference-differential equation ヤ Integro-differential equation ヲ含ム。之レ等ハ、一般ノ線状ノ Difference-equation, Difference-differential equation 等ヨリ見レバ、極メテ特殊ナモノデアル。カヽル特殊ナモノヲ特ニ論ジヤウトスルノハ，移動可能性ニ由ツテ特殊ノ方法ノ許サレルタメ故ニ外ナラヌノハ勿論デアル。

從ツテ、吾人ノ立場カラシテハ、先ヅ夫々ノ函数空間ニ於イテ線状移動可能函数変換ノ形ヲ決定スルコトガ先決問題トナル。ソシテ、ソレラガ，同一ノ方法デ論ジ盡サレルコトガ切實ナ希望トナル。

吾々ハ，未ダ、ソノ何レニ對シテモ答ヘテ居ラナイ。コヽデ論ジヤウトスル，Γf ニツイテモ、$\varphi_k(t)$ ニ大キナ制限ガツク、コレヲシモ線状移動可能ト銘ウツテ論ジヤウトスルノハ、カヽル制限ノナイ場合ニモ，同様ニ論ゼラレルデアラウカトノ希望、少クモ関心ヲ有スルガタメニ外ナラナイ。

2. サテ、$\Gamma f(x)$ ニツイテ問題 [1] ヲ考ヘル．即チ區間 (x_0, x_0+b) デ與ヘラレタ m 回微分可能デ且ツ $f^{(m)}(x)$ ガ Lebesgue 積分可能ナル $f(x)$ ヲ

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \int_0^b e^{\lambda t} d\varphi_k(t)$$

ノ根 λ_ν ヲ指數トスル exponintial sum $\sum P_\nu(x) e^{\lambda_\nu x}$

形デ展開出来ルカヲ考ヘマタ。

茲ニ，$\varphi_k(t)$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,m)$ ハ有限區間 $[0,b]$ デ有界変分ノ函數トシ

(i) $\varphi_k(t)=s_k(t)+g_k(t)$

但シ，$s_k(t)$ ハ高々有限個ノ不連続点ヲ有スル階段函數，$g_k(t)$ ニツイテハ $g_k^{(k+1)}(t)$ ガ存在シテ且ツ全連続ナリトスル、コノ假定カラ

$$\text{(ii)}\quad G(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}A_{k,q}\lambda^k e^{\lambda h_q}$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\lambda^k\left\{\sum_{p=1}^{k+1}\left[\frac{(-1)^{p-1}e^{\lambda t}g_k^{(p)}(t)}{\lambda^k}\right]_0^b+\frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}\int_0^b e^{\lambda t}g^{(k+1)}(t)\,dt\right\}$$

トナル。$(0=h_0<h_1<h_2<\cdots\cdots<h_n=b$; $A_{k,q}$ ノウチデ零ニナルモノガアルカモ知レヌ．シカシ $q\neq 0$，ヌナラバ少クモ一ツ，零デナイ $A_{k,q}$ ガ各 $q=m$ デアル)

今 $$L(x_0,x,\lambda;f)=\sum_{k=0}^{m}\int_0^b e^{\lambda\eta}\left(\int_{x_0}^{x_0+\eta}e^{-\lambda t}f^{(k)}(t)\,dt\right)d\varphi_k(\eta)$$

$$K(x_0,x,\lambda;f)=\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=0}^{p-1}\lambda^i f^{(p-1-i)}(x_0)e^{-\lambda x_0}\int_0^b e^{\lambda\eta}g_p'(\eta)\,d\eta$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n}A_{p,q}e^{h_q\lambda}\lambda^p\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\lambda^i}{\lambda^p}f^{(p-1-i)}(x_0)e^{-\lambda x_0}$$

ト置イテ

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}_r}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}\Big\{L(x_0,x,\lambda;f)+K(x_0,x,\lambda;f)\Big\}d\lambda \equiv S_r(x_0,x;f)$$

ヲ考ヘル,(コレハ $k=0$ ト置ケバ,前述 Λf ノ場合ノ *contour-integral* ニナッテヰル)。吾々ハ先ヅ,適當ニ *Contour* ノ *sequence* $\{\mathbb{C}_r\}$ ヲトレバ,$r\to\infty$ ノトキ,

$$S_r(x_0,x;f)\to f(x)\qquad (x_0<x<x+b)$$

トナルコトヲ示サウ。以下大体ノ方針ト必要ナ豫備定理トヲ略述シマセウ。

3. 先ヅ,$G(\lambda)$ ヲバ *Langer* ノ定理(前出)ニヨッテ *Exponential sum* ニ直ス;即チ

$$\text{(iii)}\quad G(\lambda)=\sum_{g=0}^{n}\sum_{k=0}^{k_g}A_{k,g}\lambda^{k}+[B]\lambda^{l_n}e^{\lambda b}-[C]\lambda^{l_0}$$

$$=\Big\{[A_{k,0}]\lambda^{k_0}-[C]\lambda^{l_0}\Big\}+\sum_{g=1}^{n-1}[A_{k_g,g}]\lambda^{k_g}e^{h_g\lambda}$$

$$+\Big\{[A_{k_n,n}]\lambda^{k_n}e^{\lambda b}+[B]e^{\lambda b}\lambda^{l_n}\Big\}$$

$$=[A_0]\lambda^{s_0}+[A_n]\lambda^{s_n}e^{\lambda b}+\sum_{g=1}^{n-1}[A_g]\lambda^{k_g}e^{h_g\lambda}$$

ト置ク。此処ニ $A_r\ (r=0,1,2,\text{------},n)$ ハ悉ク零ナラズトスル。又,l_n, l_0 ハ $\geqq -1$ ナル整数トスル,從ッテ s_0, s_n 又然リ。 以上ノ事情ノモトニ於イテ次ノ如ク準備シテ

置ク。

豫備定理1.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{\lambda q}\, d\lambda}{\lambda^i G(\lambda)} \to 0 \quad (0<q<b\ ノトキ)\ (i \geqq 1)$$

豫備定理2.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{-\lambda\delta} G^s(\lambda)}{\lambda G(\lambda)}\, d\lambda \to 0 \quad (r \to \infty\ ノトキ)$$

但シ $0<\delta<h_s$

且ツ

$$G^s(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{q=s}^{n} A_{k,q} \lambda^k e^{\lambda h_q} + \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \int_{h_s}^{b} e^{\lambda\eta} g_k'(\eta)\, d\eta$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \int_{h_s}^{b} e^{\lambda t} g_k'(t)\, dt$$

豫備定理3.

$$\oint_{C_r} \frac{e^{\lambda\delta} G_s(\lambda)}{\lambda G(\lambda)}\, d\lambda \to 0 \quad (r \to \infty\ ノトキ)$$

但シ $0<\delta<h_s$

且ツ

$$G_s(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \int_{0}^{h_s} e^{\lambda t} g_k'(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{q=0}^{s-1} A_{k,q} \lambda^k e^{\lambda h_q} + \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \int_{h_s}^{b} e^{\lambda\eta} g_k'(\eta)\, d\eta$$

4. 次ニ $\mathrm{L}(x_0, x, \lambda; f) + \mathrm{K}(x_0, x, \lambda; f)$ ヲ分解スル。

$\mathrm{L}(x_0, x, \lambda : f)$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=0}^{m}\sum_{q=s}^{n} A_{k,q}\, e^{\lambda h_q}\int_{x_0+h_{s-1}}^{x_0+h_s} e^{-\lambda\mu} f^{(k)}(\mu)\,d\mu\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\int_{x_0+h_{s-1}}^{x_0+h_s} e^{-\lambda t} f^{(k)}(t)\left(\int_{t-x_0}^{b} e^{\lambda\eta} g'_k(\eta)\,d\eta\right)dt\right\}_s$$

ト書キ直シ $\{\quad\}_s$ 各々ヲバ目標ニスル。

ソコデ記載ヲ短縮スルタメ次ノ如ク置ク：

$$l_s(x_0, \lambda; {}_\alpha^\beta : f) \equiv \sum_{k=0}^{m}\sum_{q=s}^{n} A_{k,q}\, e^{\lambda h_q}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda\mu} f^{(k)}(\mu)\,du$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t} f^{(k)}(t)\left(\int_{t-x_0}^{b} e^{\lambda\eta} g'_k(\eta)\,d\eta\right)dt$$

$$j_s(x_0, \lambda; {}_\alpha^\beta : f) \equiv \sum_{k=0}^{m}\sum_{q=0}^{s-1} A_{k,q}\, e^{\lambda h_q}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda\mu} f^{(k)}(\mu)\,du$$

$$m(x_0, \lambda; \gamma : f) \equiv \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i f^{(k-1-i)}(\gamma)\, e^{-\lambda\gamma}\int_{0}^{b} e^{\lambda\eta} g'_k(\eta)\,d\eta$$

$$n_t(x_0, \lambda; \gamma : f) \equiv \sum_{k=1}^{m}\sum_{q=t}^{n} A_{k,q}\,\lambda^k e^{h_q\lambda} e^{-\lambda\gamma}\sum_{i=s}^{k-1}\frac{\lambda^i}{\lambda^k} f^{(k+i)}(\gamma)$$

コノ各々ニ，$\dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}$ ヲカケ、γ 番目ノ Contour C_γ デ積分シタモノヲ夫々大文字デ

$$L_s^r\left(x_0, x; {\beta \atop \alpha} : f\right),\quad J_s^r\left(x_0, \lambda; {\beta \atop \alpha} : f\right),\quad M^r(x_0, x; \gamma : f),$$

$$N_t^r(x_0, x; \gamma : f)$$

デ表ハス。

又

$$M^r(x_0, x; \gamma : f) + N_s^r(x_0, x; \gamma : f) \equiv \underline{K}^r(x_0, x; \gamma : f)$$

ト置ク。然ルトキ

豫備定理4:

$$L_s^r\left(x_0, x; {\beta \atop \alpha} : f\right)$$

$$= -J_s^r\left(x_0, x; {\beta \atop \alpha} : f\right) + \Big[\underline{K}^r(x_0, x; \gamma : f)\Big]_\alpha^\beta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} \left\{ \sum_{k=0}^{m} \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} f^{(k)}(t)\, dt \left(\int_0^{t-x_0} e^{\lambda \eta} g_k'(\eta)\, d\eta \right) \right\} d\lambda$$

豫備定理5:

$x > x_0 + h_s$ ナラバ

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ L_s^r\left(x_0, x; {x_0 + h_s \atop x_0 + h_{s-1}} : f\right) - \Big[\underline{K}^r(x_0, x : \gamma : f)\Big]_{\gamma = x_0 + h_{s-1}}^{\gamma = x_0 + h_s} \right\} = 0$$

豫備定理6:

$x < x_0 + h_{s-1}$ ナラバ

$$\lim_{r \to \infty} L_s^r\left(x_0, x; {x_0 + h_s \atop x_0 + h_{s-1}} : f\right) = 0$$

豫備定理 7:

$$x_0+h_{s+1}>x>x_0+h_s \text{ ナラバ}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{L_{s+1}^{r}\left(x_0, x, {}_{x_0+h_s}^{x_0+h_{s+1}} : f\right)+K^{r}(x_0, x, x_0+h_s:f)\right\}$$

$$=f(x)$$

以上ノ如キ準備ノ下ニ於イテ $x_0+h_{s^*}<x<x_0+h_{s^*+1}$ トスレバ

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{e^{\lambda x}\{L(x_0,x,\lambda:f)+\mathbb{K}(x_0,x,\lambda:f)\}}{G(\lambda)}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}\left\{\sum_{s=1}^{n}l_s(x_0,x;\lambda:f)+\mathbb{K}+\gamma(x_0,x,\lambda:f)\right\}d\lambda$$

$$=\sum_{s=1}^{n}L_s^{r}\left(x_0,x,{}_{x_0+h_{s-1}}^{x_0+h_s}:f\right)+\mathbb{K}^{r}(x_0,x,x_0:f)$$

$$\to\sum_{s=1}^{s^*}\Big[\mathbb{K}^{r}(x_0,x,\gamma:f)\Big]_{\gamma=x_0+h_{s-1}}^{\gamma=x_0+h_s}+\mathbb{K}^{r}(x_0,x,x_0:f)$$

$$+f(x)-\mathbb{K}^{r}(x_0,x,x_0+h_{s^*}:f)$$

$$=f(x) \qquad (r\to\infty \text{ ノトキ})$$

依ッテ

定理 1. $G(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^{k}\int_0^b e^{\lambda t}d\varphi_k(t)$ ニ関シテ假定(i), (ii), (iii) ヲ設ケ、函數 $f(x)$ ハ區間 $[x_0, x_0+b]$ デ m 回微分可能デ且ツ $f^{(m)}(x)$ ハ Lebesgue 積分可能ナリトスレバ

(I) ニ於イテ定義サレタ積分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}_r}\frac{e^{\lambda x}\{L(x_0, x, \lambda : f)+\mathbb{K}(x_0, x, \lambda : f)\}}{G(\lambda)}d\lambda$$

$$\longrightarrow f(x) \qquad (r\longrightarrow\infty)$$

ナル様ニ、$\{\mathbb{C}_r\}$ ヲエラベル。

但シ　$x_0+h_s<x<x_0+h_{s+1}$　$(s=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

トス。